Distribuições discretas

Área Científica de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu

Introdução

Exemplo 1

Suponha que está a concorrer para 2 vagas de uma empresa com mais 3 colegas seus: o João, a Rosa e o Inácio. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a selecção?
Há 6 possibilidades:

- Eu e o João;
- Eu e a Rosa;
- Eu e o Inácio;
- O João e a Rosa;
- O João e o Inácio;
- A Rosa e o Inácio.

Definição de Combinações

Definição

O nº de combinações de r objectos escolhidos entre n ($r \leq n$), i.e., o número de combinações de n objectos r a r é:

$$C_r^n = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Note-se que a ordem de selecção não interessa.

Relembre: $n! = n \times (n-1) \times ... \times 1$; $0! = 1$.

Exemplo

Retomando o exemplo anterior, o nº de possibilidades é dado pelo nº de combinações de 4 elementos 2 a 2:

$$C_2^4 = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Exercício

Exemplo 2

No totoloto, uma aposta simples corresponde a escolher 6 dos 49 números existentes. Quantas apostas simples distintas se podem fazer?
Resposta:

$$C_6^{49} = \left(\begin{array}{c} 49 \\ 6 \end{array} \right) = \frac{49!}{6!43!} = 13983816$$

Prova de Bernoulli

Prova de Bernoulli

Uma experiência aleatória que tem apenas dois resultados possíveis:

$$S = Sucesso \qquad F = Fracasso$$

é uma prova de Bernoulli, onde

$$p = P(S) \quad e \quad q = 1 - p = P(F)$$

Distribuição de Bernoulli

Seja X a v.a. que assume dois valores: o valor 1 quando o resultado da prova de Bernoulli é sucesso e o valor 0 quando o resultado é fracasso. Então a função de probabilidade de X é dada por:

x	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	p

ou por

$$f_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0, 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definição

Uma v.a. discreta com função de probabilidade assim definida diz-se que tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p ($0 \leq p \leq 1$)

Valor Esperado e Variância de X

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1-p) = pq$

Distribuição Binomial

Considere-se a experiência aleatória caracterizada pelo seguinte:

- realizam-se n provas de Bernoulli em idênticas condições;
- cada prova tem apenas dois resultados possíveis:“sucesso”ou “fracasso”;
- as provas são independentes umas das outras, isto é, o resultado de cada prova não influencia os resultados das restantes;
- as probabilidades de sucesso, p, e de fracasso, $q = 1 - p$, mantêm-se inalteradas de prova para prova.

Distribuição Binomial

Definição

Seja X o nº de sucessos obtidos em n provas de Bernoulli. Então X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p e a sua função de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \times p^x \times (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, ..., n; \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Abreviadamente escreve-se: $X \sim B(n, p)$.

Valor Esperado e Variância de X

- $E(X) = np$
- $Var(X) = np(1 - p) = npq$

Exemplo 3

O Luís joga o seguinte jogo: escolhe, ao acaso, um número de 1 a 6 e em seguida lança 3 vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Se o número escolhido pelo Luís sai x vezes (num total de 3 lançamentos) ele ganha x Euros. Em contrapartida, se o número escolhido pelo Luís nunca ocorre então ele perde 5 Euros. Determine o ganho médio do Luís ao jogar este jogo.

Pretende-se calcular o valor esperado da v.a.

$$Y \equiv \text{Ganho do Luís}$$

Exemplo 3 - *cont.*

Considere-se também a v.a.

$X \equiv$ nº de vezes que ocorre o nº escolhido pelo Luís, em 3 lançamentos

Cada lançamento é uma prova de Bernoulli onde o sucesso é:

$$S \equiv \text{sai o nº escolhido pelo Luís}$$

e a probabilidade de sucesso

$$p = P(S) = 1/6$$

Então,

$$X \sim B(3, 1/6)$$

Exemplo 3 - *cont.*

Para já vamos calcular a probabilidade de, em 3 lançamentos do dado, o nº escolhido pelo Luís ocorrer 2 vezes, i.e., $P(X = 2)$.
Sejam

$$S_i \equiv \text{ ocorre o nº escolhido pelo Luís no } i-\text{ésimo lançamento}$$
$$F_i \equiv \text{ não ocorre o nº escolhido pelo Luís no } i-\text{ésimo lançamento}$$

De quantas maneiras pode ocorrer o acontecimento $\{X = 2\}$? i.e., num total de 3 lançamentos, de quantas maneiras se pode obter 2 vezes o nº escolhido pelo Luís?

$$\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) = 3 \qquad \hookrightarrow \qquad \begin{array}{l} S_1 \cap S_2 \cap F_3 \equiv SSF \\ S_1 \cap F_2 \cap S_3 \equiv SFS \\ F_1 \cap S_2 \cap S_3 \equiv FSS \end{array}$$

Então, $P(X = 2) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$.

Exemplo 3 - *cont.*

Uma vez que os lançamentos são independentes, tem-se

$$P(SSF) = P(S_1 \cap S_2 \cap F_3) = P(S_1)P(S_2)P(F_3) = p^2(1-p)^1 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(SFS) = P(S_1 \cap F_2 \cap S_3) = P(S_1)P(F_2)P(S_3) = p^2(1-p)^1 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(FSS) = P(F_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(F_1)P(S_2)P(S_3) = p^2(1-p)^1 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

Logo,

$$P(X=2) = P(SSF)+P(SFS)+P(FSS) = 3 \times p^2(1-p)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

onde, $3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ é o nº de maneiras diferentes de se obterem 2 sucessos em 3 provas de Bernoulli e $p^2(1-p)$ é a probabilidade que corresponde a cada uma delas.

Exemplo 3 - *cont.*

Determinemos agora a função de probabilidade da v.a. Y.

$$P(Y=-5)=P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.5787$$

$$P(Y=1)=P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=0.3472$$

$$P(Y=2)=P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=0.0694$$

$$P(Y=3)=P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=0.0046$$

x	-5	1	2	3
$f_Y(x)$	0.5787	0.3472	0.0694	0.0046

$$E(Y)=-5\times0.5787+1\times0.3472+2\times0.0694+3\times0.0046=-2.3937$$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 4

Numa empresa com 25 funcionários, dos quais 10 são homens, pretende-se seleccionar 6 para frequentar uma acção de formação profissional no estrangeiro. Determine a probabilidade desse grupo ser constituído equitativamente por homens e mulheres.

Consideremos o acontecimento

$$\begin{aligned} S &\equiv \text{Sucesso} \\ &\equiv \text{selecção de um homem para frequentar a acção de formação} \end{aligned}$$

e a v.a.

$X \equiv$ nº de homens seleccionados para a amostra de tamanho n.

Exemplo 4 - *cont.*

Temos uma população de tamanho $M = 25$, onde $k = 10$ é o nº de sucessos, de onde extraímos uma amostra de tamanho $n = 6$, sem reposição.

Por serem feitas sem reposição as extracções não são independentes, i.e, as extracções não podem ser consideradas provas de Bernoulli independentes.

Então a distribuição de X não é binomial.

Determinemos então a função de probabilidade de X.

Exemplo 4-*cont.*

A probabilidade do grupo ser constituído equitativamente por homens e mulheres é dada por $P(X = 3)$:

$$f_X(3) = P(X = 3) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 25 \\ 6 \end{pmatrix}} = 0.3083$$

Mais geralmente,

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 6-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 25 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix}}$$

Exemplo 4-*cont.*

No cálculo de $P(X = x)$ temos:

- denominador $= \binom{25}{6} = \binom{M}{n} \rightharpoonup$ nº de resultados possíveis, i.e., nº de maneiras diferentes de seleccionar $n = 6$ funcionários em $M = 25$;
- numerador $= \binom{10}{x}\binom{15}{6-x} = \binom{10}{x}\binom{M-k}{n-x} \rightharpoonup$ nº de resultados favoráveis, onde
  - $\binom{10}{x} = \binom{k}{x}$ é o nº de maneiras diferentes de seleccionar x homens entre $k = 10$
  - $\binom{15}{6-x} = \binom{M-k}{n-x}$ é o nº de maneiras diferentes de seleccionar $n - x = 6 - x$ mulheres entre $M - k = 15$.

Definição

Generalizando:

- *uma população de tamanho M, onde k é o número de sucessos;*
- *uma amostra de tamanho n retirada sem reposição;*
- *a variável aleatória X que representa o número de sucessos na amostra de tamanho n.*

Função de Probabilidade1

Definição

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{M-k}{n-x}}{\binom{M}{n}}, & x\text{=max}\{0\text{,n-(M-k),...,min(n,k)}\}; \\ 0, & \text{outros valores.} \end{cases}$$

Escreve-se abreviadamente $X \sim H(M, k, n)$.

Distribuição Hipergeométrica: valor Esperado e variância

- E(X)=$n\frac{k}{M}$
- Var(X)=$n\frac{k}{M}\frac{M-k}{M}\frac{M-n}{M-1}$

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é usada para tratar fenómenos aleatórios que envolvem a contagem de ocorrências num dado intervalo, geralmente de tempo ou de espaço.

Exemplos

- nº de chamadas telefónicas recebidas por uma empresa numa hora;
- nº de nós existentes num metro de tecido de uma peça acabada de fabricar;
- nº de clientes que entra numa loja de conveniência no período de almoço;
- nº de acidentes que ocorrem na A25 numa semana;
- nº de peixes doentes num metro quadrado de área de uma baía poluída.

Distribuição de Poisson

Nem todos os fenómenos de contagem de ocorrências podem ser convenientemente modelados usando a distribuição de Poisson. No entanto, se:

- o número de ocorrências em determinado intervalo é independente do número de ocorrências noutro intervalo qualquer, não coincidente com o primeiro;
- a probabilidade de haver x ocorrências num intervalo de amplitude t, depende exclusivamente do nº x e da amplitude t. Isto é, considerando dois intervalos distintos mas com a mesma amplitude, são iguais as probabilidades de se registarem x ocorrências em cada um;
- a probabilidade de mais de uma ocorrência num intervalo suficientemente pequeno é aproximadamente igual zero, portanto desprezável;
- a probabilidade de haver exactamente uma ocorrência num intervalo suficientemente pequeno é aproximadamente proporcional ao tamanho do intervalo

então, o número de ocorrências num intervalo qualquer de amplitude t, é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

Definição

Se X tem distribuição de Poisson de parâmetro μ então a função de probabilidade de X é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, & x=0,1,2,...; \\ 0, & \text{outros valores.} \end{cases}$$

Escreve-se abreviadamente $X \sim Po(\mu)$

A média e a variância desta distribuição são iguais ao parâmetro μ:

$$E(X) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \mu\,.$$

Distribuição de Poisson

Sendo

$$X \equiv \text{n}^{\text{o}} \text{ de ocorrências num intervalo de amplitude } t\,.$$

Se X tem distribuição de Poisson e se λ é o número médio de ocorrências por unidade, então $\mu = \lambda t$ é o número médio de ocorrências num intervalo de amplitude t.
Assim,

$$f_X(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}\,, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Distribuição de Poisson

Exercício (exerc. 11 da ficha nº4)

Suponhamos que os clientes entram num armazém à média de 60 por hora. Usando adequadamente a distribuição de Poisson:

a) *determine a probabilidade de que num intervalo de 5 minutos não entre ninguém no armazém.*

b) *o intervalo de tempo tal que a probabilidade de que não entre ninguém no armazém durante o dito intervalo seja de 0.5.*

Sol: a)0.0067; b) Intervalo de aproximadamente 0.7 minutos.

Valor Esperado e Variância de X

- E(X)=μ
- Var(X)=μ