Área Científica de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu
Instituto Politécnico de Viseu

Curso de Preparação em Matemática para Acesso ao Ensino Superior

Resumos Teóricos e Exercícios Práticos

Licenciaturas do Departamento de Gestão e Tecnologias de Design Mobiliário

Maria Cristina Peixoto Matos
Márcio Nascimento

2019/2020

Conteúdo

Capítulo 1

Operações algébricas em $\mathbb{R}$

1.1 Enquadramento teórico

Soma de frações: Só podemos somar/subtrair frações com o mesmo denominador.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \tag{1.1}$$

ou

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d \pm b \times c}{b \times d}, \ b \neq d. \tag{1.2}$$

Produto de frações: Para multiplicar fracções, multiplicamos numerador com numerador, denominador com denominador.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}. \tag{1.3}$$

Divisão de frações: É sempre possível dividir $\frac{a}{b}, \ b \neq 0$ por $\frac{c}{d}, \ d \neq 0$ em $\mathbb{Q}$.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}. \tag{1.4}$$

Simplificação de escrita:

$$+(+a) = a \qquad +(-a) = -a \qquad -(+a) = -a \qquad -(-a) = a. \tag{1.5}$$

Propriedades das Potências: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

(a) $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{a \ vezes} = x^a$ (b) $x^a \times x^b = x^{a+b}$ (c) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ (d) $(x^a)^b = x^{a \times b}$

(e) $(x \times y)^a = x^a \times y^a$ (f) $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ (g) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ (h) $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}, \ b \in \mathbb{N}$

1.2 Exercícios de aplicação

1. Calcule:

   (a) $\frac{5}{8}+\frac{1}{12}$ (b) $\frac{3}{4}-\frac{7}{10}$ (c) $-\frac{5}{18}+\frac{7}{12}$ (d) $-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{7}{3}$

2. Simplifique:

   (a) $(-2)^4\times(-2)^3$ (b) $\dfrac{(-3)^{15}}{(-3)^8}$ (c) $2^3+2^{10}\div 2^9$ (d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^6\times[(-3)^2]^3$

   (e) $2^3\times 32\div 16^2$ (f) $\dfrac{(3^2-3)3\div 2^3-5^2}{\sqrt{5+\sqrt{16}}}$ (g) $[(-2)^{-3}]^{-2}+(2^{-1})^{-2}$

3. Calcule:

   (a) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2\times(-5)^{-1}\div\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ (b) $\dfrac{(-3)^2\times 2^2\times(-6)^3}{(-2)^2\times 3^2}$ (c) $(-1)^{30}+\left[\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-3}\div 5^3\times 2^2\right]^3$

   (d) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-5}\div 5^2\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\times\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^2}$ (e) $\dfrac{(-1)^{11}+5^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}{(2^3)^2\div 2^{-3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^9\div 3^7}$ (f) $\dfrac{(-1,2)^5\times(-1,2)^5}{-1,2\times\left[\left(-\dfrac{6}{5}\right)^3\right]^2}$

4. Transforme em radicais:

   (a) $3^{\frac{1}{2}}$ (b) $\left(5^{-2}\right)^{\frac{1}{5}}$ (c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ (d) $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{5}{6}}$ (e) $\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{3}{4}}$ (f) $\left(4^{\frac{1}{4}}\right)^{-3}$

5. Sendo $a,\ b,\ c\neq 0$, simplifique e apresente o resultado com expoentes positivos:

   (a) $\dfrac{a^2\times b^5}{a^2\times b^{-2}}$ (b) $\dfrac{a^{-3}\times b^5\times c^4}{a^{-2}\times b^2\times c}$ (c) $\dfrac{4^{-2}\times a^{-3}\times b^4\times c^{-2}}{2^{-3}\times b^2\times a^{-1}\times c^2}$

Capítulo 2

Noções básicas de estatística e probabilidades

2.1 Enquadramento teórico

Fenómenos aleatórios: São fenómenos observáveis em que o resultado de cada realização individual é incerto, mesmo que possa haver uma tendência.
Experiência aleatória: É a realização de um fenómeno aleatório e a observação dos resultados.
Espaço de resultados: Conjunto dos resultados possíveis associados a uma experiência aleatória.
Acontecimento: Qualquer subconjunto do espaço de resultados.
Acontecimento elementar: Acontecimento constituído por um só elemento do espaço de resultados.
Regra de Laplace: Em relação a uma experiência aleatória de um espaço amostral finito, com n resultados, em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, isto é, têm igual probabilidade de ocorrerem, a probabilidade de um acontecimento A é dada pelo quociente entre o número m de casos favoráveis a A (resultados que compõem A) e o número n de casos possíveis (resultados que compõem o espaço de resultados). Neste caso, escreve-se, $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

2.2 Exercícios de aplicação

1. Com um dado numerado de 1 a 6 fez-se a seguinte experiência:

   - Lançou-se o dado 10 vezes e construiu-se a seguinte tabela

Número da face	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	3	2	1	2	(A)	2
Frequência Relativa	0.3	0.2	(B)	(C)	(D)	(E)

   - Lançou-se o dado 2000 vezes e construiu-se a seguinte tabela

Número da face	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	280	300	300	(F)	240	(G)
Frequência Relativa	0.14	0.15	(H)	0.14	(J)	(K)

   (a) Complete as tabelas anteriores.

   (b) Se estivesse a jogar com este dado, qual era o número que iria apostar? Justifique.

   (c) Comente a seguinte afirmação: *"o dado é viciado."*

2. Uma nova vacina está em fase de testes. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados que foram sendo recolhidos até terem sido realizados 2000 testes em seres humanos.

Número de testes	Número de sucessos
150	118
280	238
500	416
800	650
1000	823
1500	1225
2000	1642

   (a) Construa a tabela de frequência relativas.

   (b) Qual é o valor que estima para a probabilidade de sucesso desta vacina quando aplicada a uma pessoa? Justifique a sua resposta.

3. Numa sondagem interrogaram-se 1000 pessoas. 20% responderam "sim"; 50% responderam "mais ou menos" e as restantes responderam "não".

   Encontramos uma dessas 1000 pessoas.

   (a) Quantas pessoas responderam "não"?

   (b) Qual é a probabilidade da pessoa encontrada ter respondido "não"?

   (c) Qual é a probabilidade dessa pessoa não ter respondido "não"?

4. Suponha que lança um dado, não viciado, numerado de 1 a 6, muitas vezes (por exemplo 10000 vezes). Quantas vezes espera que saia o número 3? Justifique.

5. Calcule a probabilidade de, extraindo uma carta ao acaso de um baralho de 40 cartas, sair:

   (a) uma carta de copas;

   (b) um rei;

   (c) uma carta preta.

6. Calcule a probabilidade de, no lançamento de um dado numerado de 1 a 6, sair:

   (a) um número ímpar;

   (b) um número maior do que 4;

   (c) um múltiplo de 6;

   (d) um múltiplo de 8;

   (e) um número inferior a 10.

7. Calcule a probabilidade de, lançando ao acaso dois dados não viciados, numerados de 1 a 6 cada um, as pintas existentes nas faces voltadas para cima somarem 7.

8. Num saco existem três bolas, uma de cada cor (azul, branca e preta).

   Extraem-se ao acaso e simultaneamente duas bola do saco.

   (a) Qual a probabilidade de sair a bola branca?

   (b) Qual a probabilidade de não sair a bola preta?

9. Lançamos duas vezes uma moeda. Qual é a probabilidade de obter cara pelo menos uma vez?

10. Se lançar uma moeda três vezes, é mais provável obter três lados iguais ou dois iguais e um diferente?

11. Numa caixa existem 4 fichas numeradas de 1 a 4.

    Extraem-se ao acaso e simultaneamente duas fichas da caixa.

    (a) Quantos são os acontecimentos elementares possíveis?

    (b) Calcule a probabilidade de sair:

       i. a ficha com o número 1 e a ficha com o número 3;

       ii. uma ficha com um número par e a outra com um número ímpar;

       iii. não sair a ficha com o número 1.

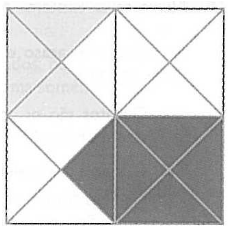
12. Numa gaveta há 4 meias brancas e 2 meias pretas. Tira-se da gaveta uma meia ao acaso e, em seguida, sem repor a primeira, é tirada uma segunda meia. Determine a probabilidade:

    (a) das duas meias serem brancas;

    (b) da primeira meia ser branca e a segunda ser preta;

    (c) de ser uma meia de cada cor.

13. Colocamos 16 triângulos iguais, de três cores diferentes (branco, cinzento e preto), de forma a obtermos um quadrado como mostra a figura. Tirando um triângulo ao acaso, determine a probabilidade de:



    (a) ser preto;

    (b) ser branco ou preto;

    (c) não ser branco.

14. Um saco tem bolas brancas e bolas pretas. As bolas brancas são 12 e a probabilidade de tirar uma bola preta quando se tira ao acaso uma bola do saco, é 25%. Determine o número total de bolas existente no saco.

15. Num parque de estacionamento estão 40 carros: 16 japoneses e os restantes europeus. Determine a probabilidade do segundo carro a sair do parque ser japonês, sabendo que o primeiro carro que saiu era europeu.

16. O Tiago foi a um restaurante que tinha, para esse dia, a seguinte ementa:

   Entradas

   - melão com presunto
   - salada do chefe

   Peixe

   - espetada do mar
   - sardinhas assadas

   Carne

   - cabrito assado

   Sobremesas

   - pudim
   - mousse
   - salada de frutas

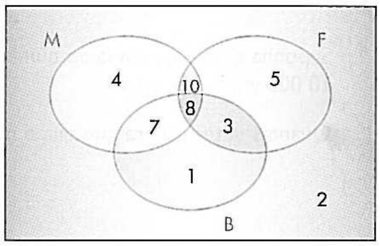
   O Tiago vai escolher uma entrada, um prato (peixe ou carne) e uma sobremesa.

   (a) Quantas refeições diferentes pode escolher?

   (b) Se escolhermos ao acaso uma dessas refeições possíveis, qual é a probabilidade das sardinhas assadas fazerem parte da refeição?

   (c) O Tiago gosta muito de mousse e, portanto, já decidiu o que vai comer à sobremesa. Qual é a probabilidade do Tiago ir comer cabrito assado?

17. Quarenta alunos inscreveram-se para exame. Só dois alunos é que faltaram a todos os exames e os outros fizeram exame, a uma ou mais das seguintes disciplinas: Matemática (M), Física (F) e Biologia (B). O diagrama ao lado indica o número de alunos em cada exame.



   Se escolhermos ao acaso um dos alunos inscritos para o exame, qual é a probabilidade de:

   (a) ter feito exame de Matemática?

   (b) ter feito exame de Matemática mas não de Física nem de Biologia?

   (c) ter feito exame às três disciplinas?

18. Num quadrado, de lado 10 cm, desenhamos um triângulo de altura 8 cm e de base igual ao lado do quadrado. Supondo que, lançando uma moeda ao ar, o centro da moeda cai em qualquer ponto do quadrado com a mesma probabilidade, calcule a probabilidade do centro da moeda cair sobre o triângulo.

19. Num saco existem 18 bolas: 4 roxas, 5 brancas e 9 pretas. Tira-se uma bola ao acaso do saco.

    (a) Qual a probabilidade de a bola ser preta?

    (b) Qual a probabilidade de a bola ser branca ou roxa?

    (c) Haverá algum acontecimento cuja probabilidade seja $\frac{20}{18}$? Justifique.

    (d) Supondo que tirávamos duas bolas ao acaso do saco, sem repor a primeira, determine a probabilidade das duas bolas serem:

        i. ambas pretas;

        ii. ambas roxas.

20. Na escola do Vítor fez-se um estudo à eficácia do cozinheiro da cantina. Concluiu-se que:

    - a probabilidade da comida ficar queimada é de 0.03;
    - a probabilidade de colocar sal a mais é de 0.09;
    - a probabilidade de colocar sal a menos é de 0.11.

    Determine a probabilidade de hoje a comida sair boa, isto é, nem queimada, nem salgada nem insossa.

21. Num prédio com 20 habitações, o ardina entregou em 12, habitações, o jornal "Público", em 7 o "Jornal de Notícias", e em 5 não entregou qualquer jornal.

    Qual é a probabilidade de, escolhendo ao acaso uma habitação, terem recebido os dois jornais?

22. No frigorífico tínhamos iogurtes da mesma marca e de três sabores: morango, ananás e banana.

    A probabilidade de tirar ao acaso um iogurte de morango é $\frac{1}{5}$; de tirar um iogurte de banana é $\frac{1}{3}$.

    Sabendo que há 14 iogurtes de ananás, determine quantos iogurtes há ao todo no frigirífico.

23. Fizeram-se 500 bilhetes de uma rifa. Para ter 2% de probabilidade de ganhar, quantos bilhetes preciso de compar?

24. Uma urna contém 3 bolas amarelas, 5 brancas e 2 azuis. Uma é tirada aleatoriamente.

    Determine a probabilidade:

    (a) de sair bola azul;

    (b) de não sair bola branca.

25. Lançaram-se dois dados numerados de 1 a 6.

    (a) Quantos são os acontecimentos elementares possíveis?

    (b) Calcule a probabilidade de:

        i. sair dois 5;

        ii. não sair o 6.

26. Num saco existem 6 bolas numeradas de 1 a 6.

    Tirando simultaneamente duas bolas ao acaso, calcule a probabilidade:

    (a) de saírem dois números ímpares;

    (b) da soma dos números ser 8;

    (c) de sair um número ímpar e outro par.

Capítulo 3

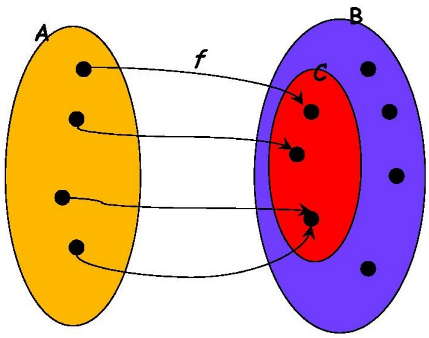
Generalidades de funções e função afim

3.1 Enquadramento teórico

Uma **função** é uma relação unívoca entre dois conjuntos, A e B, isto é, a cada elemento de A corresponde um e um só elemento de B.

$$\forall x \in A,\ \exists^1 y \in B : y = f(x). \tag{3.1}$$

O conjunto A chama-se **domínio** da função f, representa-se por D_f, e os elementos de A designam-se por **objetos**. O conjunto B chama-se **conjunto de chegada** da função f. O conjunto C chama-se **contradomínio** da função f, representa-se por D'_f, e os elementos de C designam-se por **imagens**.



Se o domínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, então f diz-se uma **função real de variável real** e escrevemos

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & y = f(x) \end{array} \tag{3.2}$$

O **domínio** de uma função, real de variável real, é o conjunto dos números reais para os quais têm significado as operações na expressão algébrica que a define. O **contradomínio** de uma função, real de variável real, é o conjunto de todos os números reais que são imagens de algum elemento do domínio.
Zero de uma função é um objeto cuja imagem é nula, isto é, $x \in D_f : f(x) = 0$.

Uma função é **crescente em sentido lato**

$$\forall x_1,\ x_2 \in D_f : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \tag{3.3}$$

Uma função é **crescente em sentido estrito**

$$\forall x_1,\ x_2 \in D_f : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \tag{3.4}$$

Uma função é **decrescente em sentido lato**

$$\forall x_1,\ x_2 \in D_f : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \tag{3.5}$$

Uma função é **decrescente em sentido estrito**

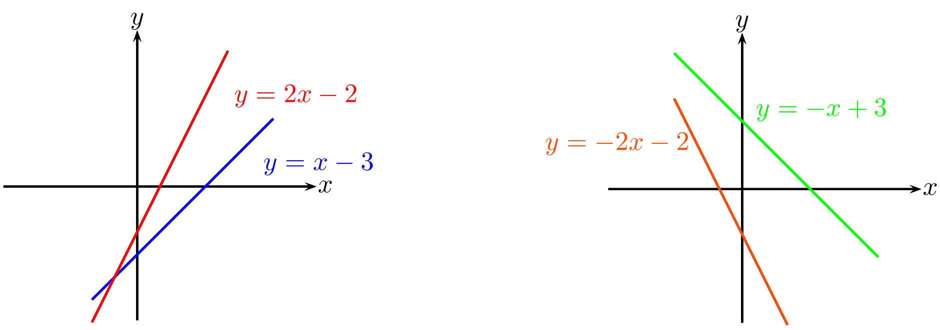
$$\forall x_1,\ x_2 \in D_f : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \tag{3.6}$$

Uma função diz-se **monótona** se é crescente ou decrescente no seu domínio.
Uma função diz-se **estritamente monótona** se é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio.
Uma função **afim** é uma função definida por uma expressão algébrica do tipo $y = ax + b$, onde a e b são números reais. O gráfico de uma função afim é uma **reta**.
a designa-se por **declive da reta** e influencia a inclinação da reta.

- Se o valor de a é positivo a reta é crescente.
- Se o valor de a é negativo a reta é decrescente.

b designa-se por **ordenada na origem** e determina o ponto onde o gráfico interseta o eixo das ordenadas (eixo dos YY). O gráfico de uma função afim é uma reta.

Exemplos de funções afim



Note que se $a > 0$ quanto maior é o valor de a maior é a inclinação da reta e se $a < 0$, quanto maior é o valor de a menor é a inclinação da reta

Casos particulares de funções afim

- **Função linear** É uma função afim onde o $b = 0$, ou seja, a expressão analítica de uma função linear é $y = ax$.
  No caso particular de $a = 1$ e $b = 0$ a função chama-se função identidade.
  O gráfico de uma função linear interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 0)$.
  Exemplos: $y = 2x$, $y = -5x$, $y = \dfrac{x}{3}$, $y = -\dfrac{1}{7}x$.

- **Função constante** É uma função afim onde o $a = 0$, ou seja, a expressão analítica de uma função constante é $y = b$.
  O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo das abcissa (eixo dos XX).
  Exemplos: $y = 3$, $y = -2.7$, $y = \dfrac{4}{3}$, $y = -\dfrac{6}{5}$.

3.2 Exercícios de aplicação

1. Considere a função f definida por $f(x) = -2x + 3$. Calcule:

   (a) $f(1)$ (b) $f(0)$ (c) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (d) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

   (e) $f(a)$ (f) $f(-a)$ (g) $f(3a)$ (h) $f(b-1)$

2. Considere a função g definida por $f(x) = \dfrac{5}{2}x$. Calcule $f(0)$ e $f(-1)$.

3. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{4}x - 7$.

   (a) Determine a imagem de 4.
   (b) Determine o objeto cuja imagem é -7.
   (c) Indique o domínio e o contradomínio de f.
   (d) Determine, caso existam, os zeros da função f.
   (e) Indique, justificando a sua resposta, se a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente.
   (f) Indique se a função tem extremos.

4. Determine a expressão analítica da função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que:

   (a) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$.
   (b) $f(2) = -2$ e $f(1) = 1$.

5. Considere a função g definida por $g(x) = -3x + 4$.

   (a) Determine a imagem de 2.

   (b) Determine o objeto cuja imagem é 1.

   (c) O ponto de coordenadas $(4, 8)$ pertence ao gráfico da função? Justifique a sua resposta.

   (d) Calcule as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de g com o eixo das ordenadas.

   (e) Determine os valores de x tais que $g(x) = 0$.

   (f) Represente a função g graficamente.

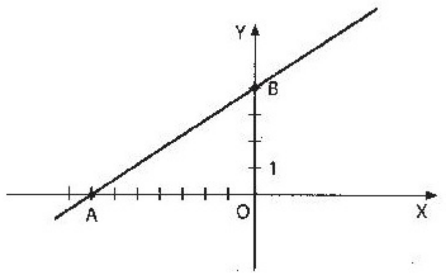
6. Dadas as funções $f(x) = 3x - 4$ e $g(x) = 2x + 1$, determine os valores de x tais que $f(x) < g(x)$.

7. Esboce o gráfico das seguintes funções:

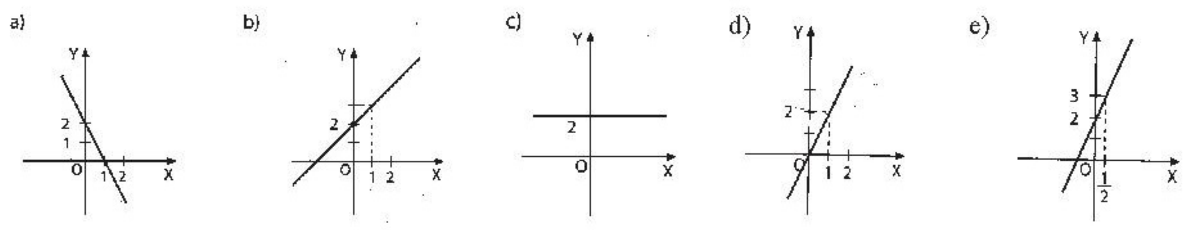
   (a) $f(x) = x + 2$ (b) $f(x) = 1 + 2x$ (c) $f(x) = -5$ (d) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 1 - x, & x \geq 1 \end{cases}$

   .

8. Indique a expressão da função $f(x) = ax + b$ cujo gráfico é dado por:



9. Determine uma expressão analítica para cada uma das funções cujo gráfico consta na figura seguinte, indicando, em cada caso, se se trata de uma função linear ou constante.



10. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -x + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

    (a) Calcule $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$ e $f\left(\dfrac{9}{8}\right)$.

    (b) Faça o esboço do gráfico da função f.

Capítulo 4

Equações do 2º grau. Função quadrática

4.1 Enquadramento teórico

As funções quadráticas são da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0\,.$$

O gráfico destas funções são parábolas. Para esboçar o gráfico de uma função quadrática devemos ter em conta:

Concavidade: $a > 0 \Rightarrow$ Concavidade voltada para cima
$a < 0 \Rightarrow$ Concavidade voltada para baixo

Zeros: $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dois zeros reais distintos
$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ um zero real duplo
$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ não existem zeros reais

Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

Eixo de simetria: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Sinal: $b^2 - 4ac > 0 \ \Rightarrow$ f tem sinal contrário ao de a no intervalo dos zeros e sinal igual ao de a fora no intervalo dos zeros
$b^2 - 4ac = 0 \ \Rightarrow$ f tem o sinal de a excepto no zero
$b^2 - 4ac < 0 \ \Rightarrow$ f tem sempre o sinal de a

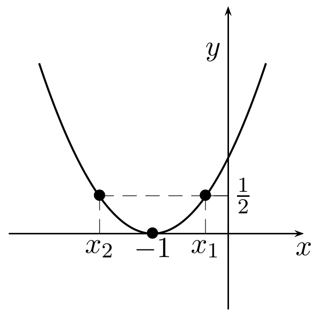
Uma parábola também se pode representar pela função quadrática

$$f(x) = a(x-h)^2 + k,\ \ a \neq 0\,,$$

onde (h, k) são as coordenadas do vértice.

Exemplo: Represente graficamente a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

A parábola tem vértice no ponto de abcissa $x = -\dfrac{b}{2a} = -1$. Logo, as coordenadas do vértice são $(-1, 0)$.
Como $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.
Fazendo $y = \dfrac{1}{2}$, obtemos



$$x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, a parábola contém $\left(x_1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(x_2, \dfrac{1}{2}\right)$.

4.2 Exercícios de aplicação

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, se possível, as seguintes equações do $2^{\underline{o}}$ grau.

   (a) $2x^2 - 4 = 0$ (b) $2x^2 + 6 = 2$ (c) $x^2 - 36 = 0$

   (d) $-3x^2 + 12 = 0$ (e) $2x^2 - 4x = 0$ (f) $x^2 + 5x = 0$

   (g) $2x = 3x^2$ (h) $\dfrac{x^2}{3} = \dfrac{5x}{2}$ (i) $(x + 2)^2 = 3$

   (j) $x^2 - 8 = -4$ (k) $3x^2 + 5x + 2 = 0$ (l) $2x^2 + 4x - 8 = 0$

   (m) $-2x^2 - x + 3 = 2$ (n) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (o) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

   (p) $2x(3x + 4) = 8$ (q) $x^2 + 4x = \dfrac{9}{4}$ (r) $x^2 + \dfrac{4x}{3} = -\dfrac{2}{3}$

   (s) $2x^2 + 7x = 0$ (t) $2(x - 1)^2 + 7x = (x - 2)(x + 2)$ (u) $x^2 + 4x = -1$

   (v) $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$ (w) $2x + 1 = -x^2$

2. Determine os valores de k de modo que a equação $kx^2 + x + 2 = 0$.

   (a) tenha apenas uma solução;
   (b) não tenha nenhuma solução;
   (c) tenha duas soluções distintas.

3. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \qquad g(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad h(x) = x^2 - 3x \qquad i(x) = (x-1)^2 + 1\ .$$

Para cada uma das funções,

(a) determine os zeros, caso existam.

(b) faça um esboço do seu gráfico.

(c) indique o seu domínio e contradomínio.

4. Resolva as seguintes inequações do 2º grau.

(a) $x^2 + 1 \geq 2x$ (b) $2 < x(x-3)$ (c) $x^2 < x$

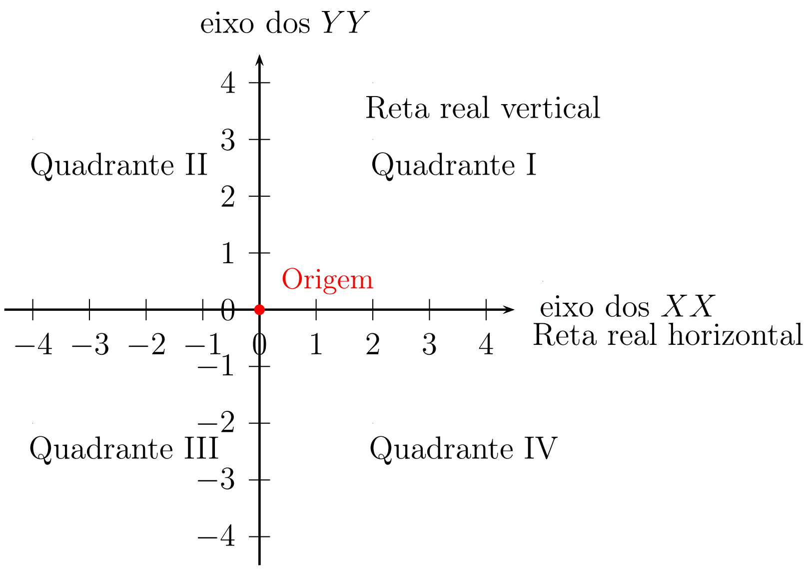
Capítulo 5

Sistemas de equações e sucessões

5.1 Enquadramento teórico

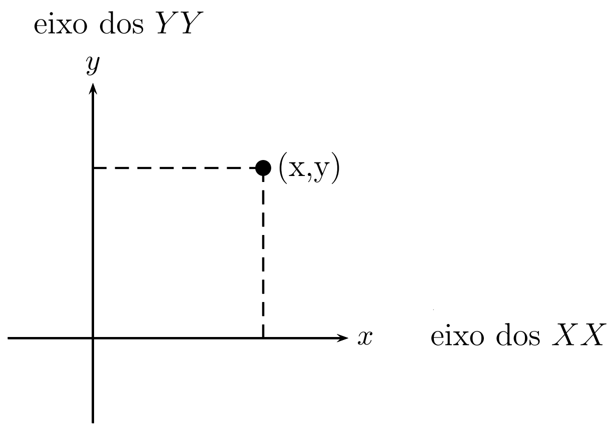
5.1.1 O Plano Cartesiano

Assim como podemos representar números reais por pontos numa reta de números reais, podemos também representar pares ordenados de números reais por pontos num plano chamado **sistema de coordenadas retangulares**, ou **plano cartesiano**.
Forma-se o plano cartesiano utilizando-se duas retas que se intersectam segundo um ângulo reto. A reta horizontal costuma chamar-se **eixo dos XX**, e a reta vertical **eixo dos YY**. O ponto de intersecção desses dois eixos é a **origem**, e os dois eixos dividem o plano em quatro partes iguais chamadas **quadrantes**.

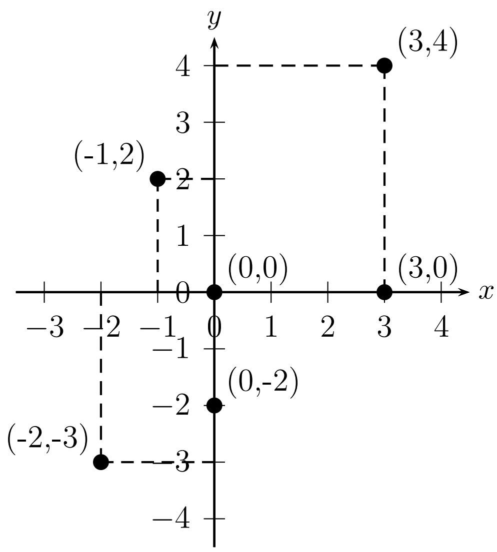


Cada ponto do plano corresponde a um par ordenado (x, y) de números reais x e y, chamados **coordenadas** do ponto.

A **coordenada x** representa a distância orientada do eixo y ao ponto, e a coordenada y representa a distância orientada do eixo x ao ponto.



Consideremos os pontos de coordenadas $(-1, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(-2, -3)$ e $(0, -2)$. Para marcar o ponto $(-1, 2)$, imaginemos uma reta vertical passando por -1 no eixo dos XX e uma reta horizontal passando por 2 no eixo dos YY. A intersecção dessas duas retas é o ponto $(-1, 2)$. De maneira análoga marcam-se os outros pontos.



5.1.2 Sistemas de Equações

Considere o seguinte problema:

A diferença entre as idades de dois irmãos é de 10 anos e a soma é 34 anos. Qual é a idade de cada um dos irmãos?

Seja:

- y $\rightarrow$ Idade do irmão mais velho,
- x $\rightarrow$ Idade do irmão mais novo.

Atendendo aos dados do problema somos conduzidos às equações:

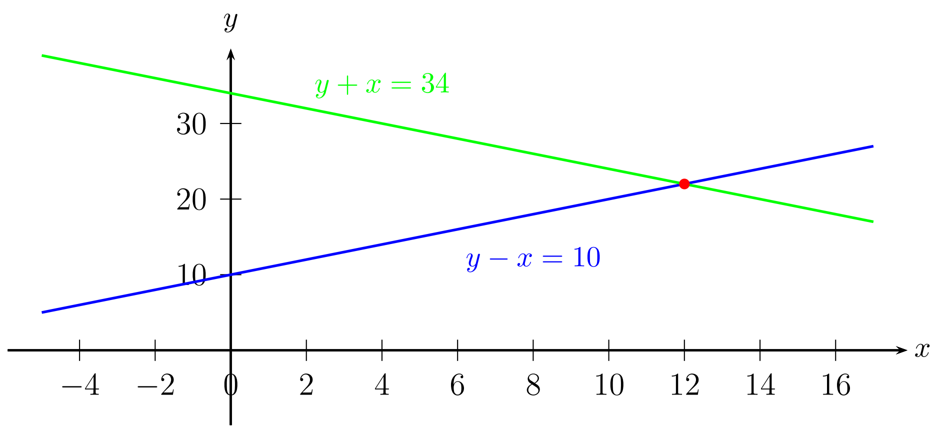
$$y - x = 10 \text{ e } y + x = 34.$$

Como as duas equações têm de ser verificadas simultaneamente, consideremos o sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{l} y - x = 10 \\ y + x = 34 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x + 10 \\ x + 10 + x & = & 34 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & x + 10 \\ 2x & = & 34 - 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 12 + 10 \\ x = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 22 \\ x = 12 \end{array}\right.$$

Vamos representar graficamente as duas equações obtidas:



Um **par ordenado** (x, y) é solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas, x e y, se for solução simultaneamente das duas equações.

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$ usando o método de substituição.

Resolução:

$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$ Na 1 equação o coeficiente de y é 1. Se resolvermos a 1 equação em ordem a y não vão aparecer dominadores.

$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 5(6 - 2x) = 22 \end{cases}$ Na 2 equação vamos substituir y pela expressão $6 - 2x$.

$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 30 - 10x = 22 \end{cases}$ A 2 equação só tem uma incógnita. Vamos resolver esta equação em ordem a x.

$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ -8x = -8 \end{cases}$

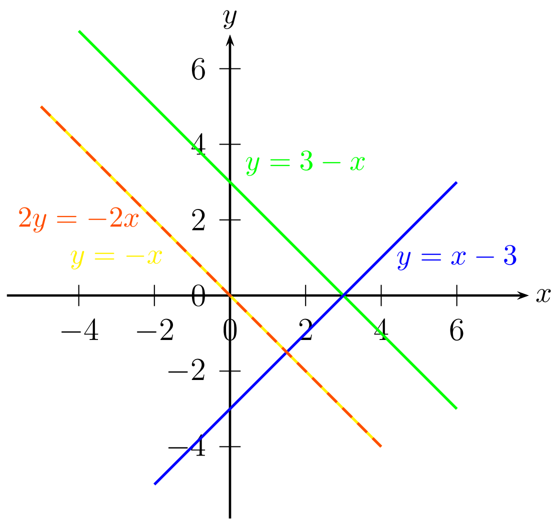
$\begin{cases} y = 6 - 2 \times 1 \\ x = 1 \end{cases}$ Substituímos o valor de x na 1 equação e determinamos y.

$\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$ A solução do sistema é $(x, y) = (1, 4)$.

5.1.3 Classificação de Sistemas

Na figura seguinte estão representadas graficamente as retas cujas equações são:

$$y = -x + 3, \; y = -x, \; y = x - 3 \text{ e } 2y = -2x \; .$$



Sistemas impossíveis: Observando o gráfico verificamos que as retas de equação $y = -x$ e $y = 3 - x$ são estritamente paralelas, isto é, não têm qualquer ponto comum.

$$\textbf{O sistema} \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = -x + 3 \end{array} \right. \textbf{é impossível.}$$

Verificação:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = -x + 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & -x \\ -x & = & -x + 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & -x \\ 0x & = & 3 \end{array} \right.$$

Ora $0x = 3$ é uma equação impossível. Se num sistema uma equação é impossível, o sistema é impossível. O sistema não tem qualquer solução.

Sistemas possíveis: Observando o gráfico podemos escrever os seguintes sistemas possíveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = x - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ -x = x - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ -2x = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2} \\ \\ x = \frac{3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Solução: } \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3 - x \\ y = x - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3 - x \\ 3 - x = x - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3 - x \\ -2x = -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3 - 3 \\ x = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Solução: } (3, 0).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ 2y = -2x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = -x \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x.$$

Os dois primeiros sistemas têm uma única solução, dizemos que são sistemas possíveis determinados. O ponto de intersecção das retas tem como coordenadas a solução do sistema.

No último sistema as duas equações traduzem a mesma informação. Graficamente os gráficos das equações são paralelos coincidentes. O sistema tem uma infinidade de soluções. Todos os pontos da reta são soluções do sistema e o sistema diz-se **possível indeterminado**.

5.2 Sucessões

Matematicamente, a palavra sucessão é usada da mesma forma que na linguagem comum. Quando dizemos que um conjunto de acontecimentos está em sucessão, pensamos num conjunto ordenado de modo a ter um primeiro elemento, um segundo elemento, ...Ou seja, matematicamente uma sucessão é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

Uma **sucessão** é uma função de variável natural e com valores reais. Em linguagem simbólica temos:

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

O conjunto de partida da sucessão poderá ser qualquer subconjunto do conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ ou, ainda, o conjunto dos inteiros não negativos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Os valores

$$u(1), u(2), \cdots, u(n), \cdots$$

denominam-se **termos da sucessão**: primeiro termo, segundo termo, $\cdots$, n-ésimo termo, $\cdots$. O contra-domínio da função u denomina-se por **conjunto dos termos da sucessão**. Chama-se **termo geral da sucessão** à expressão designatória $u(n)$ e, habitualmente representa-se u_n. Denotamos os termos da sucessão por

$u(1) = u_1$	1º termo da sucessão;
$u(2) = u_2$	2º termo da sucessão;
$\cdots$	
$u(n) = u_n$	termo de ordem n ou *termo geral da sucessão*;
$u(n) = u_{n+1}$	termo de ordem $n + 1$.
$\cdots$	

Exemplo:

(a) Dada a sucessão cujo termo geral é $u_n = \dfrac{3n+1}{2n}$, temos :

1 termo: $$u_1 = \frac{3 \times 1 + 1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

5 termo: $$u_5 = \frac{3 \times 5 + 1}{2 \times 5} = \frac{16}{10} = 1,6$$

termo de ordem $n + 1$: $$u_{n+1} = \frac{3 \times (n+1) + 1}{2 \times (n+1)} = \frac{3n+4}{2n+2}$$

termo de ordem $2n + 1$: $$u_{2n+1} = \frac{3 \times (2n+1) + 1}{2 \times (2n+1)} = \frac{6n+4}{4n+2}$$

(b) A seguinte sucessão é definida por *recorrência*:

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = u_1 + 5, \qquad u_3 = u_2 + 7, \qquad \cdots, \qquad u_n = u_{n-1} + (2n+1).$$

Exemplo: Consideremos a sucessão cujo termo geral é $u_n = (-1)^n$. Temos:

$$u_1 = -1,\ u_2 = 1,\ u_3 = -1,\ u_4 = 1, ...,\ u_n = \begin{cases} -1, & \text{se n ímpar} \\ 1, & \text{se n par} \end{cases}.$$

Logo, podemos concluir que os termos de ordem ímpar formam uma sucessão e os termos de ordem par formam outra sucessão.

5.3 Exercícios de aplicação

1. Verifique se o ponto $(x, y) = (1, \sqrt{2})$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x^3 - 3x = -y^2 \\ y^2 + x = 3 \end{cases}.$$

2. Resolva os seguintes sistemas de equações e classifique-os.

(a) $\begin{cases} x - 4 = y \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x = y + 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -7x - (2 - \frac{5}{2}) = 0 \\ \dfrac{3(2x+y)}{5} - 1 = 4x - \dfrac{2}{5} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2(x - y) = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3(x-1)}{2} - y = 7 - 3y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} a^2 - (a-1)^2 = b \\ 0.4b - \dfrac{a-1}{10} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 3(x-1) - 2(y-3) = 4 \\ x - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x + 1 = -(y-3) \\ \left(\dfrac{1}{2} - y\right) = x + y^2 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 2(x-3) + y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

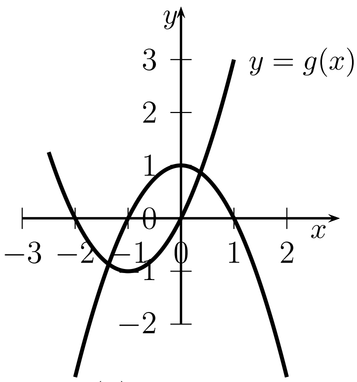
(i) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{2x}{5} = \dfrac{3y}{7} \end{cases}$ (j) $\begin{cases} 5(x+1) + 3(y-2) = 4 \\ 8(x+1) + 5(y-2) = 9 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ y + 1 = x \end{cases}$ (l) $\begin{cases} \frac{x}{2} + 3y = 4 \\ \frac{7}{5}y - x = -2x \end{cases}$

3. Duas pessoas ganharam 50 euros num trabalho. Uma delas ganhou 25% a mais do que a outra. Quanto ganhou cada pessoa?

4. Considere dois retângulos A e B com o mesmo perímetro.
   Sabe-se que a largura do retângulo A é o dobro da do B e que o comprimento do retângulo B é o triplo do de A. Sabendo que o perímetro dos retângulos é 20cm, determine as medidas dos retângulos A e B.

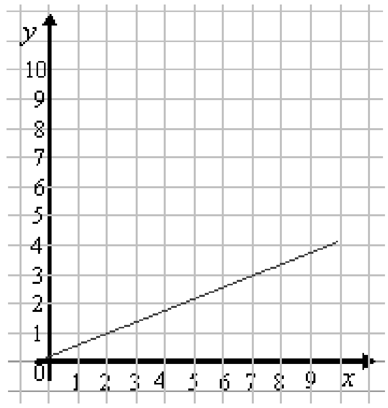
5. Determine a expressão algébricas das funções f e g, utilizando um sistema de equações.



6. Determine analiticamente e geometricamente, caso seja possível, a solução dos seguintes sistemas:

   (a) $\begin{cases} x^2 - 1 = y \\ y + x = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = x^2 \\ -(x-1)^2 = y + 1 \end{cases}$

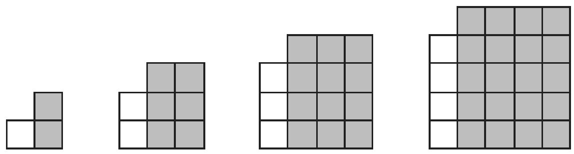
7. A reta de equação $-2x + 5y = 1$ está representada no referencial o.n. XOY.



   (a) Represente no mesmo referencial a reta de equação $y = 2x - 3$.

   (b) Resolva analiticamente o sistema $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$
   Explique como pode usar o gráfico das duas retas para verificar a solução que encontrou para o sistema.

8. Na figura estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de azulejos quadrados que segue a lei de formação sugerida na figura. Os azulejos são todos iguais, sendo uns brancos e outros cinzentos.

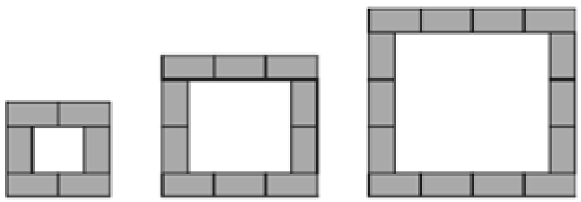


1.º termo 2.º termo 3.º termo 4.º termo

(a) Quantos azulejos brancos tem o 2012^o termo da sequência?

(b) Qual é o número total de azulejos do 9^o termo da sequência?

9. Na figura, estão representadas três das construções que o Miguel fez, utilizando peças retangulares geometricamente iguais.



1.ª Construção 2.ª Construção 3.ª Construção

Em cada construção, as peças estão agrupadas segundo uma determinada regra, formando quadrados.

(a) Quantas peças retangulares terá a 5.ª construção?

(b) De acordo com a lei de formação sugerida na Figura 1, será que o Miguel consegue fazer uma construção com 2503 peças? Justifique a sua resposta.

10. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$ assim definida

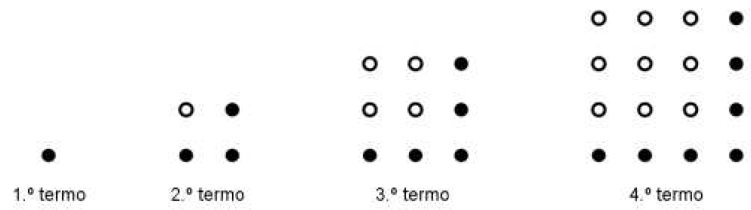
$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \leq 1 \\ x^2 + 1 & se \quad x > 1 \end{cases}$$

Seja (u_n) a sucessão de termo geral definido por $u_n = f\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

(a) Indique a expressão que define o termo geral da sucessão (u_n).

(b) Calcule o termo de ordem 3 da sucessão (u_n).

11. Na figura, estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de círculos que segue a lei de formação sugerida. A partir do 2^o, todos os termos têm círculos brancos e pretos.



(a) Quantos círculos tem o quinto termo?

(b) Existirá um termo na sequência com 81 círculos? Justifique a resposta e no caso afirmativo indica a ordem desse termo.

(c) Um termo da sequência tem 144 círculos brancos. Quantos círculos pretos tem esse termo?

(d) Considerando apenas a sequência dos círculos pretos, escreve o termo geral dessa sequência.

12. Considere uma sequência em que o primeiro termo é 244 e em que a lei de formação de cada um dos termos a seguir ao primeiro é: *"Adicionar dois ao termo anterior e depois dividir por três."* Qual é o terceiro termo da sequência?

Capítulo 6

Estudo de funções: domínios, limites, continuidade e derivadas

6.1 Enquadramento teórico

Seja f uma função real de variável real.

- Seja a é um ponto de acumulação do domínio de f.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe se e só se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

- Seja a pertencente ao domínio de f.

  f é contínua em $x = a$ se e só se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Seja a pertencente ao domínio de f.

  A derivada de f em $x = a$ é definida por $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

  Geometricamente $f'(a)$ representa o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x = a$.

Monotonia de um função:
Seja f uma função contínua em $[a,\ b]$ e diferenciável em $]a,\ b[$:
Um elemento c do domínio de f é um **ponto crítico de** f se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe.

- Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in [a,\ b]$, então f é estritamente crescente em $[a,\ b]$.

- Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in [a,\ b]$, então f é estritamente decrescente em $[a,\ b]$.

- Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in [a,\ b]$, então f é constante em $[a,\ b]$.

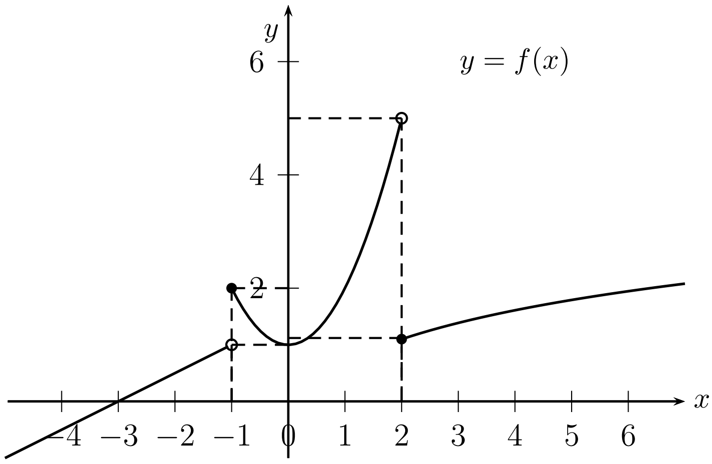
Sentido da concavidade de um função:
Seja f uma função contínua e que admite segunda derivada num intervalo $]a,\ b[$:
O ponto que separa o sentido das concavidades chama-se **ponto de inflexão**.

- $f''(x) > 0,\ \forall x \in\ ]a,\ b[\Rightarrow f$ tem concavidade voltada para cima em $]a,\ b[$.

- $f''(x) < 0,\ \forall x \in\ ]a,\ b[\Rightarrow f$ tem concavidade voltada para baixo em $]a,\ b[$.

6.2 Exercícios de aplicação

1. Na figura seguinte está representado o gráfico de uma função f, real de variável real :



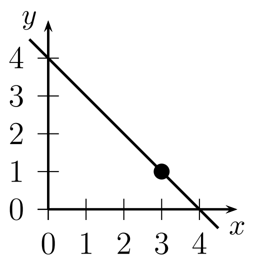
   (a) Justifique que f é de facto uma função.

   (b) Determine o domínio, o contradomínio e os zeros de f.

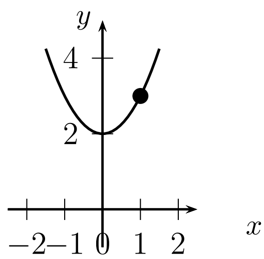
   (c) Indique os pontos onde f é contínua.

2. Através do gráfico justifique a existência ou não existência dos seguintes limites:

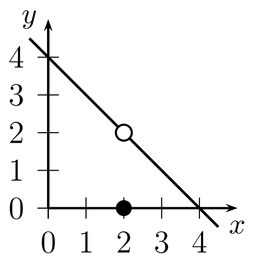
   (**a**) $\lim\limits_{x \to 3} (4 - x)$



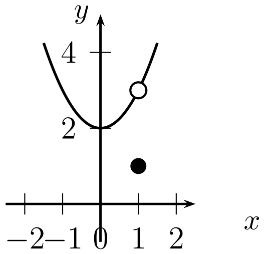
   (**b**) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2)$



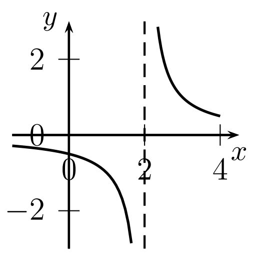
   (**c**) $\lim\limits_{x \to 2} \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$



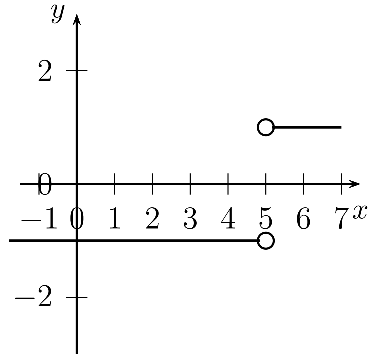
   (**d**) $\lim\limits_{x \to 1} \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



(**e**) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$



(**f**) $\lim_{x\to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$



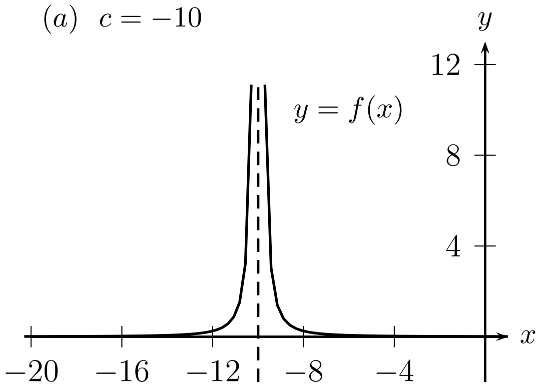
3. Esboce o gráfico de uma função tal que:

   - $f(0)$ não está definida
   - $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$
   - $f(2) = 6$
   - $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

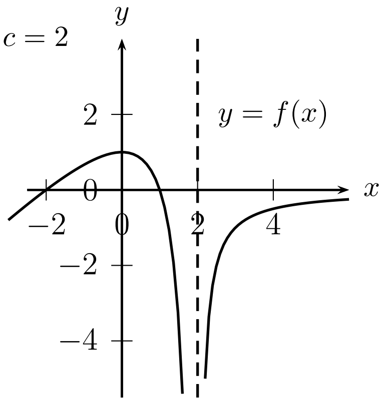
4. Através do gráfico de $y = f(x)$ calcule para o valor de c indicado, se possível, o valor de :

   - $\lim_{x\to c^-} f(x)$
   - $\lim_{x\to c^+} f(x)$
   - $\lim_{x\to c} f(x)$
   - $f(c)$

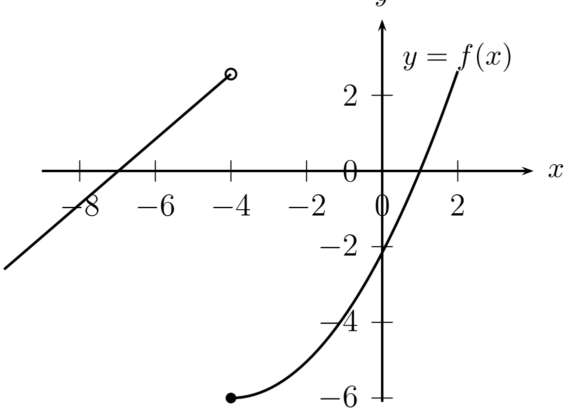
(a) $c = -10$



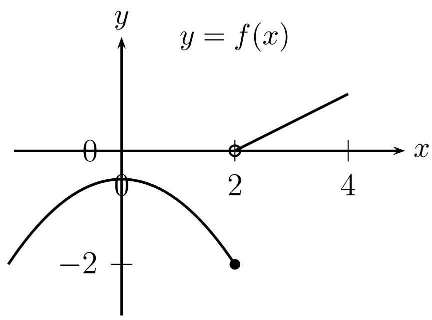
(b) $c = 2$



(c) $c = -4$



(d) $c = 2$



5. Determine o intervalo de continuidade das funções dadas nos exercícios 1, 2 e 4.

6. Para cada uma das seguintes alíneas, faça um esboço de um gráfico de uma função f tal que:

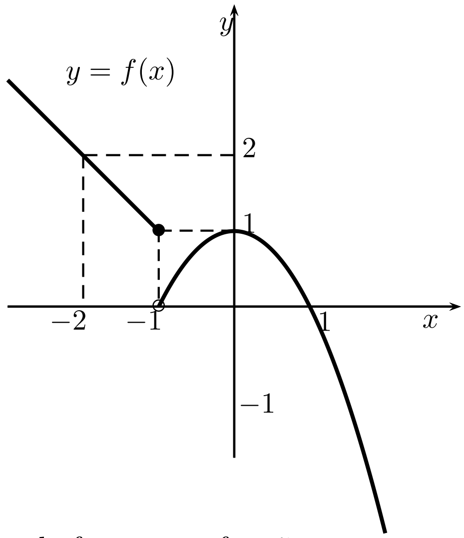
   (a) f seja contínua em $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) f seja contínua em $\mathbb{R}^+$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   (c) f seja contínua em $\mathbb{R}$, monótona crescente em $\mathbb{R}^+$ e $f'(0) = 0$.

   (d) f seja contínua em $\mathbb{R}$, monótona crescente em $\mathbb{R}^+$ e $f'(0)$ não exista .

7. Na figura está a representação gráfica de uma função f.



   (a) Justifique que f é de facto uma função.

   (b) Determine o domínio e o contradomínio de f.

   (c) Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$.
   Determine o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$.

   (d) Determine, caso exista, o valor dos seguintes limites

      i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; iii. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$; iv. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; v. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

   (e) Determine um intervalo $[a, b]$ onde a função f:

      i. seja contínua em $[a, b]$; ii. seja descontínua num ponto de $[a, b]$

      iii. tenha derivada positiva em $[a, b]$

8. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 3+x^2 & se \quad x<1 \\ b & se \quad x=1 \\ k+x & se \quad x>1 \end{cases} \quad b,k \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Determine os valores de k e b de modo que

      i. exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

      ii. f seja contínua em $x=1$

   (b) Faça $b=k=1$.

      i. Justifique que não existe $f'(1)$.

      ii. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x=0$.

9. Aplicando as regras de derivação, determine a expressão da função derivada de cada uma das funções definidas por:

   (a) $y = 9x^3+2x+5$ (b) $y=\dfrac{x^2}{2}(3+x^4)$ (c) $y=\left(2x^2-\dfrac{1}{2}x\right)^3$ (d) $y=\dfrac{4x+5}{2x-1}$

   (e) $y=e^{3x+1}$ (f) $y=(x+3)(x^3+2x)$ (g) $y=\dfrac{3x+1}{4x+5}$ (h) $y=\sqrt[3]{(4x)^2}$

10. Sabe-se que o custo total C (em milhares de euros) para produzir x centenas de peça de um determinado produto é dado por

$$C(x) = 3 - x^2 + 2x$$

   (a) Qual o custo se não existir produção?

   (b) Calcule $C(1)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

   (c) Determine o valor de x que maximiza o custo.

   (d) Resolva analiticamente e geometricamente o sistema $\begin{cases} C(x)=y \\ x-y=-1 \end{cases}$.

11. Sabe-se que o Lucro L (em milhares de euros) obtido por uma empresa, para produzir x **centenas** de unidades de um determinado produto é dado por

$$L(x) = -x^2+4x, \quad 0 \le x \le 4.$$

   (a) Justifique a seguinte afirmação: *"Se não existir produção não existe lucro."*

   (b) Determine o lucro que a empresa obtém se produzir 100 peças.

   (c) Que número de peças aconselharia ao dirigente da empresa para que este tenha um lucro máximo? Justifique convenientemente a sua resposta.

   (d) Resolva analiticamente e geometricamente o sistema $\begin{cases} L(x)=y \\ x-y=0 \end{cases}$.

12. Um projétil é lançado verticalmente de baixo para cima.
Admita que a altura h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dado por

$$h(t) = 100t - 5t^2$$

   (a) Determine a altura máxima atingida pelo projétil.
   (b) Quanto tempo demorou o projétil a regressar ao solo?
   (c) Determine analiticamente e geometricamente a solução do sistema $\begin{cases} h(t) = y \\ 50t - y = 0 \end{cases}$.

13. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de q centenas de peças, expresso em dezenas de euros, é dado por $C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000$.
   (a) Determine a função custo marginal, $C'(q)$, e calcule o seu valor para a 600 peça.
   (b) Estude a variação do custo total no intervalo $]0,\ 8[$. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo?

14. Das seguintes afirmações, apenas uma é falsa, qual é:
   (a) O gráfico da função $y = 1 - 2x^2$ tem a concavidade voltada para baixo.
   (b) O vértice da função $y = (x-3)^2 + 2$ é $(3, 2)$.
   (c) A família de funções $y = ax^2 + bx,\ (a \neq 0)$ têm um zero em comum.
   (d) A função $y = |-2x^2 - 3|$ tem dois zeros.

Capítulo 7

Função exponencial e função logarítmica

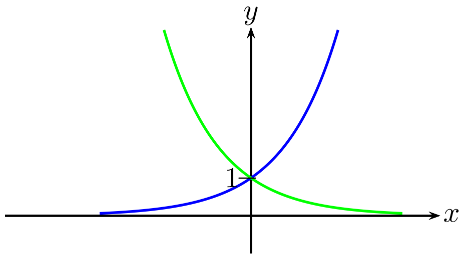
7.1 Enquadramento teórico

7.1.1 Função exponencial

A função **exponencial de base** $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, tem domínio $\mathbb{R}$, e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) = a^x \end{array}$$

A função exponencial é estritamente crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, não interseta os eixo dos xx e interseta o eixo dos yy no ponto de coordenadas $(0, 1)$. De acordo com o valor de a, o gráfico tem uma das seguintes formas:



Se $a = e$, número de Nepper, a função exponencial designa-se por **função exponencial natural**.

Equações exponenciais: $a^x = a^\alpha \Rightarrow x = \alpha, \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.
Inequações exponenciais: $a > 1$ e $a^x < a^y \Rightarrow x < y$; $0 < a < 1$ e $a^x < a^y \Rightarrow x > y$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.

7.1.2 Função logarítmica

Chamamos **logaritmo de um número positivo** x **na base** a, $(a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$ ao número real y tal que $a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y$. Se $a = e$ escrevemos $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

Regras operatórias dos logaritmos: $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},\ x > 0$

1. $\log_a a = 1$ pois $a^1 = a$
2. $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$
3. $\log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$ pois $a^{-1} = \frac{1}{a}$
4. $\log_a(a^x) = x$ pois $a^y = a^y$
5. $a^{\log_a x} = x$ pois $\log_a x = \log_a x$.

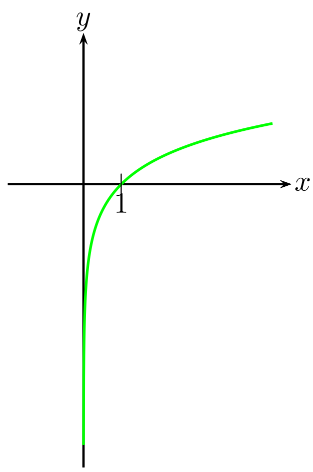
Propriedades dos logaritmos: Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},\ x > 0,\ y > 0$

1. $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^n) = n \times \log_a x$
4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
5. $\dfrac{1}{\log_a x} = \log_x a$.

Chamamos **função logarítmica** à função tal que $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x,\ a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

A função logarítmica é estritamente crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, não interseta os eixo dos yy e interseta o eixo dos xx no ponto de coordenadas $(1, 0)$.

O gráfico da função logarítmica, para $\ln x$, tem a seguinte forma:



Equações logarítmicas: $\log_a x = \log_a \alpha \Rightarrow x = \alpha,\ a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.
Recorde que não existem logaritmos de números não positivos e que a base é um número não negativo diferente de 1.

Inequações logarítmicas: $a > 1$ e $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x < y$; $0 < a < 1$ e $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x > y$, com, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

7.2 Exercícios de aplicação

1. (a) Escreva $64 = 4^3$ na forma logarítmica

   (b) Escreva $\log_4\left(\frac{1}{64}\right) = -3$ na forma exponencial

   (c) Se $4 = \log_2 x$, determine x

2. A partir do gráfico da função $f(x) = e^x$, represente graficamente as seguintes funções, indicando o seu domínio e o seu contradomínio:

   (a) $g(x) = e^{x+2}$ (b) $h(x) = e^x + 2$

3. A partir do gráfico da função $f(x) = \ln x$, represente graficamente as seguintes funções, indicando o seu domínio e o seu contradomínio:

   (a) $g(x) = \ln(x+2)$ (b) $h(x) = 1 - \ln x$

4. Completa as seguintes relações:

   (a) $\ln ... = 1$ (b) $\log_3 ... = 0$ (c) $3^{\log_3 2} = ...$ (b) $\log_5 2 = \frac{...}{\ln 5}$

5. Aplique as propriedades dos logaritmos.

   (a) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ (b) $\ln x + 2\ln y$ (c) $\log_2(x-2) - \log_2(x+2)$

   (d) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln(e^2)$ (e) $\log_6(\sqrt{x^2+1})$ (f) $\log_3(x+1) + \log_3(y-2) + \log_3(2z)$

6. Caracterize a função inversa das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 1 + \ln x$ (b) $(x) = 1 - e^x$

7. Determine a solução das seguintes equações:

   (a) $e^x = e^5$ (b) $5^x + 10^x = 5^{x+1}$ (c) $e^{3x} - 3 = \ln 1$ (d) $e^x - e^x x = 0$

   (e) $e^{2x} - e^{1-x} = 0$ (f) $2\ln x - \ln(x+2) = 0$ (g) $\ln(x^2 - x) - \ln(6-2x) = 0$

   (h) $e^{x+\ln x} = 2x$ (i) $\ln^2 x - 3\ln x = -2$ (j) $e^x + 2e^{-x} = 3$

8. Resolva as seguintes inequações:

   (a) $e^{2-x} \leq 1$ (b) $e^{x-1} < xe^x$ (c) $\ln(1-3x) - 1 < 0$ (d) $2\ln(1-x) - 1 > 0$

9. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$ (b) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ (c) $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ (d) $f(x) = \ln(x+5)$

Anexo A

Formulário

A.1 Álgebra

Operações com expoentes

(a) $x^n x^m = x^{n+m}$ (b) $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ (c) $(xy)^n = x^n y^n$ (d) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

(e) $(x^n)^m = x^{nm}$ (f) $-x^n = -(x^n)$ (g) $cx^n = c(x^n)$ (h) $x^{n^m} = x^{(n^m)}$

Expoentes e radicais (n e m inteiros positivos)

(a) $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ (b) $x^0 = 1,\ x \neq 0$ (c) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n},\ x \neq 0$ (d) $\sqrt[n]{x} = a \Rightarrow x = a^n$

(e) $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ (f) $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n\ fatores}$ (g) $x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = (\sqrt[n]{x})^m$ (h) $x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

Operações com fracções

(a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ (b) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} - \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}$

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$ (d) $\left(\dfrac{a/b}{c/d}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{d}{c}\right) = \dfrac{ad}{bc}$

(e) $\dfrac{a/b}{c} = \left(\dfrac{a/b}{c/1}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{a}{bc}$ (f) $\dfrac{ab}{ac} = \dfrac{b}{c}$

(g) $\dfrac{ab+ac}{ad} = \dfrac{a(b+c)}{ad} = \dfrac{b+c}{d}$

Fórmula quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fatores e produtos especiais

(a) $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ (b) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$

(c) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$ (d) $x^4 - a^4 = (x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

Teorema binomial

(a) $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (b) $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

(c) $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (d) $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

(e) $(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$ (f) $(x-a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4$

Lei do anulamento do produto

Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$

Lei do corte

Se $ac = bc$ e $c \neq 0$, então $a = b$

A.2 Propriedades dos logaritmos

Propriedades de inversas

(a) $\ln e^x = x$ (b) $e^{\ln x} = x$ (c) $\log_a a^x = x$ (d) $a^{\log_a x} = x$

Propriedades de logaritmos

(a) $\ln 1 = 0$ (b) $\ln e = 1$ (c) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(d) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ (e) $\ln x^y = y \ln x$ (f) $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \dfrac{\ln x}{n}$

(g) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ (h) $\log_a x = \log_b x \log_a b$ (i) $\log_a 1 = 0$

(j) $\log_a a = 1$ (k) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (l) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(m) $\log_a x^y = y \log_a x$ (m) $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a x}{n}$

A.3 Geometria analítica plana

Distância entre (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ponto médio entre (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

$$\text{Ponto médio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Coeficiente angular da reta que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Coeficiente angular de retas paralelas

$$m_1 = m_2$$

Coeficiente angular de retas perpendiculares

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Equações de retas

Equação reduzida:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Reta vertical:	$x = a$
Reta horizontal:	$y = b$
Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0):	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
Equação da reta normal ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0):	$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Equações de parábolas [vértice: (h, k)]

Equação geral:	$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
Equação do vértice:	$y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$

A.4 Funções

Função afim: $f(x) = ax + b, a \neq 0$

Função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

Concavidade: $a > 0 \Rightarrow$ Concavidade voltada para cima
$a < 0 \Rightarrow$ Concavidade voltada para baixo

Zeros: $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dois zeros reais distintos
$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ um zero real duplo
$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ não existem zeros reais

Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

Eixo de simetria: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Sinal: $b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tem sinal contrário ao de a no intervalo dos zeros e sinal igual ao de a fora no intervalo dos zeros
$b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tem o sinal de a excepto no zero
$b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tem sempre o sinal de a

Função polinomial de grau n: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$

Função racional: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, com $p(x)$ e $q(x)$ funções polinomiais

Função módulo: $f(x) = |x - a| = \begin{cases} x - a, & x - a \geq 0 \\ -(x - a), & x - a < 0 \end{cases}$

A.5 Limites notáveis

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^p} = 0$ (e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad p \in \mathbb{R}^+$ (f) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^p} = -\infty$

(g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$ (h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+c)}{\ln x} = 1,\ c \in \mathbb{R}$

A.6 Regras de derivação

Sejam u e v funções reais de variável real x e $k \in \mathbb{R}$.

(a) $\dfrac{d}{dx}\,(k) = 0$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(ku) = ku'$

(c) $\dfrac{d}{dx}\,(uv) = u'v + uv'$

(d) $\dfrac{d}{dx}\,(u \pm v) = u' \pm v'$

(e) $\dfrac{d}{dx}\,\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$

(f) $\dfrac{d}{dx}\,(u^n) = nu^{n-1}u',\ n \in \mathbb{R}$

(g) $\dfrac{d}{dx}\,(e^u)' = u'e^u$

(h) $\dfrac{d}{dx}\,(a^u) = u'a^u \ln a,\ a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

(i) $\dfrac{d}{dx}\,(\ln u) = \dfrac{u'}{u}$

(j) $\dfrac{d}{dx}\,(\log_b u) = \dfrac{u'}{(\ln b)u},\ b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

(k) $\dfrac{d}{dx}\,(\sqrt[n]{u}) = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\qquad n \in N\backslash\{1\},\ (u > 0\ se\ n\ par)$

(l) $\dfrac{d}{dx}\,(u^v) = v\ u^{v-1}\ u' + v'\ u^v \ln u$

(m) $\dfrac{d}{dx}\,(u \circ v) = u'(v)v'$

Bibliografia

[1] Acilina Azenha, Maria Amélia Jerónimo: *Cálculo Diferencial e Integral em* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^n$, McGrawHill, 1995.

[2] Albino Pereira, Jorge Nuno Silva, Maria Augusta Ferreira Neves: *Matemática A 11*, Porto Editora, 2015.

[3] Albino Pereira, Jorge Nuno Silva, Maria Augusta Ferreira Neves: *Matemática A 12*, Porto Editora, 2015.

[4] António Pinto Silva, Luís Guerreiro, Maria Augusta Ferreira Neves: *Máximo 10 - Matemática A*, Porto Editora, 2015.

[5] Belmiro Costa, Maria Ermelinda Rodrigues: *Novo Espaço 9*, Porto Editora, 2015.

[6] Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues: *Novo Espaço 10- Matemática A*, Porto Editora, 2015.

[7] Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues: *Novo Espaço 11 - Matemática A*, Porto Editora, 2015.

[8] Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues: *Novo Espaço 12 - Matemática A*, Porto Editora, 2015.

[9] Brigitte Thudichum, Iolanda Centeno Passos, Olga Flora Correia: *Matemática em Ação 9*, Lisboa Editora, S.A /Raiz Editora, 2015.

[10] Larson Hostetler Edwards: *Cálculo*, volume 1, oitava edição, McGrawHill, 2006.