Uma **experiência aleatória** é uma experiência onde intervém o acaso, isto é, cujos resultados são incertos, não sendo portanto possível saber qual o resultado da experiência antes de a realizar.

Exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar;
- o lançamento de um dado e registo do número de pontos obtidos;
- a tiragem de uma carta de um baralho e anotação das suas características;
- a observação do sexo de um recém-nascido numa série de nascimentos;
- um gestor de produção observa uma linha de produção durante uma hora e conta o número de peças defeituosas;
- um analista financeiro observa a cotação na bolsa das ações de uma determinada empresa para saber se esta subiu ou não.

O **espaço amostral, Ω**, de uma experiência aleatória, também designado por **espaço de resultados** ou **espaço fundamental**, é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência aleatória.

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda ao ar

  F ≡ "saída de face" **C** ≡ "saída de coroa"

  Espaço de resultados: **Ω={F,C}**

- Lançamento de um dado

  j ≡ "aparição da face com *j* pontos",

  Espaço de resultados: **Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}**

- Tiragem de uma carta de um baralho

Ω={ás de paus, duque de paus, ..., rei de paus,
ás de espadas, duque de espadas, ..., rei de espadas,
ás de ouros, duque de ouros, ..., rei de ouros,
ás de copas, duque de copas, ..., rei de copas}

- Observação do sexo de um recém nascido numa série de nascimentos é:

Ω={sexo feminino, sexo masculino}

- Experiência aleatória realizada pelo gestor de produção

Ω={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... }

- Experiência aleatória realizada pelo analista financeiro

Ω={a cotação subiu, a cotação desceu}

Os subconjuntos de **Ω** são conjuntos de resultados possíveis da experiência aleatória. Estes designam-se por **acontecimentos aleatórios**.

O espaço de resultados, Ω, é denominado por **acontecimento certo**.

Os acontecimentos formados por um elemento, {ω}, são designados por **acontecimentos elementares.**

O conjunto vazio, ∅ ou { }, denomina-se de **acontecimento impossível**.

Exemplo:

A *Mosal* é uma fábrica de azulejos e mosaicos. Todos os anos a fábrica seleciona ao acaso dois empregados para visitarem uma feira internacional de material de construção. O gestor da fábrica gostaria que os empregados enviados tivessem alguma experiência de trabalho no sector de design.

Dois empregados são selecionados ao acaso.

C≡"seleção de um empregado que satisfaz aquele **c**ritério"

N≡"seleção de um empregado que não satisfaz o critério"

Acontecimento certo: **Ω**={(N,C),(N,N),(C,N),(C,C)}≡{NN,NC,CN,CC}.

Acontecimentos elementares: {NN}, {NC}, {CN}, {CC}.

Outros acontecimentos:

- **A** ≡ "Seleção de exatamente um empregado que satisfaz o critério":

  A={NC,CN}.

  Se o resultado da experiência for NC ou CN, isto é, se o primeiro empregado selecionado não satisfaz o critério e o segundo satisfaz, ou vice-versa, diz-se que o <u>acontecimento **A** se realizou</u>.

- **B** ≡"Seleção de exatamente um empregado que não satisfaz o critério":

  B={NC,CN}.

  O acontecimento <u>**B** realiza-se</u> se o primeiro empregado selecionado não satisfaz o critério e o segundo satisfaz, ou vice-versa.

- **C** ≡ "O primeiro empregado selecionado não satisfaz o critério":

  C={NN, NC}.

- **D** ≡ "Seleção de pelo menos um empregado que satisfaz o critério":

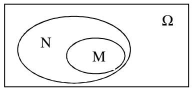
  D={NC,CN, CC}.

- **E** ≡ "Seleção de dois empregados que não satisfazem o critério":

  E={NN} (acontecimento elementar).

Sejam **M** e **N** acontecimentos quaisquer associados a uma experiência aleatória com espaço de resultados **Ω**.

- **M ⊂ N**



A realização de M implica a realização de N.

Exemplos:

- E ⊂ C (se E se realiza também C se realiza);
- B ⊂ D (se B se realiza também D se realiza).

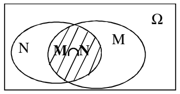
- **M = N** (M e N são idênticos): **M ⊂ N** e **N ⊂ M**

A realização de um implica a realização do outro.

Exemplo:

- A=B (se A se realiza também B se realiza e vise versa).

- **M ∩ N**

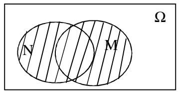


M∩N realiza-se se e só se M e N se realizam conjuntamente.

Exemplos:

- B ∩ D ={NC, CN} (realiza-se se sair NC ou CN, em ambos os casos B e D realizam-se conjuntamente);
- E ∩ C ={NN} (realiza-se se sair NN, neste caso E e C realizam-se conjuntamente).

- **M ∪ N**

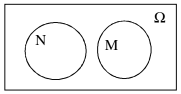


M ∪N realiza-se se e só se M ou N se realizam .

Exemplo:

-A ∪ E ={NC, CN, NN} (realiza-se se sair NC, CN ou NN, i.e., se se realiza A ou E).

- Quando **$M \cap N = \varnothing$**, M e N dizem-se **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis**.

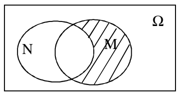


A realização de um deles implica a não realização do outro.

Exemplo:

- $E \cap B = \varnothing$ (se sair NN realiza-se E e não B; se sair NC ou CN realiza-se B e não E).

- **M \ N** ou **M-N**

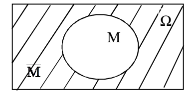


M \ N realiza-se se e só se M se realiza sem que N se realize.

Exemplos:

- C \ E ={NC} (se sair NC realiza-se C sem que se realize E);
- D \ C ={CC, CN} (se sair CC ou CN realiza-se D sem que se realize C).

- $\overline{M}$ ou **Ω-M**

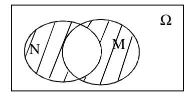


$\overline{M}$ realiza-se se e só se M não se realiza.

Exemplos:

- $\overline{B}$={NN, CC} (se sair NN ou CC realiza-se $\overline{B}$ e não B);
- $\overline{D}$={NN} (se sair NN realiza-se $\overline{D}$ e não D).

- **M Δ N = (M \ N) ∪ (N \ M)** (**diferença simétrica** entre M e N)



M Δ N realiza-se se e só se M se realiza ou N se realiza, mas não os dois conjuntamente.

Exemplos:

- $B \Delta C = (B\backslash C) \cup (C\backslash B)=\{CN\}\cup\{NN\}=\{CN, NN\}$ (se sair CN realiza-se B Δ C pois realiza-se B e não C; se sair NN realiza-se B Δ C pois realiza-se C e não B);

- $D \Delta C =(C\backslash D) \cup (D\backslash C)=\{NN, CC, CN\}$ (se sair NN, CC ou CN realiza-se D Δ C pois realiza-se C ou D mas não os dois conjuntamente).

Definição Clássica de Probabilidade

Suponha que numa experiência aleatória que tem **n** resultados possíveis, todos equiprováveis (igualmente prováveis), um acontecimento **A** pode realizar-se de $\mathbf{n_A}$ maneiras diferentes. Então a probabilidade do acontecimento A é dada por:

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{\text{nº de resultados favoráveis a } A}{\text{nº de resultados possíveis}}.$$

Exemplo:

Lançamento de um dado honesto.

- **A**≡“saída de face com um nº par de pontos”

A={2,4,6}.

Como o dado é honesto, os 6 resultados possíveis são igualmente prováveis.

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{\text{nº de resultados favoráveis a } A}{\text{nº de resultados possíveis}}=\frac{3}{6}=0.5.$$

- B ≡ "saída de face com mais de 5 pontos"

B={6} (acontecimento elementar)

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{\text{nº de resultados favoráveis a } B}{\text{nº de resultados possíveis}} = \frac{1}{6} = 0.1667.$$

Exemplo:

Extração de uma carta de um baralho.

A ≡ "extração de um duque"

A={duque de copas, duque de paus, duque de espadas, duque de ouros}.

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis a } A}{\text{nº de resultados possíveis}} = \frac{4}{52} = 0.0769.$$

Esta definição tem algumas limitações:

- só pode ser aplicada se o número de resultados possíveis da experiência aleatória for finito
- só pode ser aplicada se os resultados forem igualmente prováveis.

Esta definição também não permite dar resposta às seguintes questões:

- Qual é a probabilidade de uma fábrica produzir num dia 20 unidades?
- Qual a probabilidade de sair uma face no lançamento de uma moeda não equilibrada
- Qual é a probabilidade de uma pessoa selecionada ao acaso ser hipertensa?
- Qual é a probabilidade de uma peça que sai de uma linha de produção ser defeituosa?

Definição Frequencista de Probabilidade

Vamos admitir que realizamos uma determinada experiência aleatória **n** vezes, em idênticas condições, e que o acontecimento **A** se realizou n_A vezes. Seja f_A a frequência relativa da ocorrência de A, isto é,

$$f_A = \frac{n_A}{n}.$$

De acordo com a definição frequencista de probabilidade, f_A é uma aproximação da probabilidade de **A**, P(A), e quanto maior for **n**, melhor será essa aproximação. Isto é, quando se aumenta o número de realizações da experiência, a frequência relativa f_A tende para a probabilidade do acontecimento **A**:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty} f_A.$$

Podemos então dizer que a frequência relativa fornece uma boa indicação do valor da probabilidade, quando se repete a experiência um número suficientemente grande de vezes.

Exemplo:

Suponhamos que depois de examinarmos uma moeda damos conta que esta não é equilibrada, i.e., que os acontecimentos “saída de face” – F, e “saída de coroa” – C, não são igualmente prováveis. Seja **p** a probabilidade do acontecimento F – **p**=P(F).

Podemos aproximar o valor de **p** realizando um grande número de experiências e tomando a frequência relativa do acontecimento {F}. Se a moeda fosse equilibrada, ao fim de um grande número de lançamentos a frequência relativa aproximar-se-ia de 0.5.

Exemplo:

Suponha que é gestor de vendas de um concessionário de uma marca conhecida de automóveis e precisa de saber qual é a probabilidade do stand vender mais de 4 automóveis na próxima semana. Através dos registos da empresa foi possível saber qual o número de automóveis vendidos por semana, nas últimas 50 semanas. Estes dados são apresentados na tabela seguinte.

Número de automóveis vendidos	Número de semanas
0	2
1	10
2	18
3	12
4	3
5	3
6	2

Usando a definição frequencista de probabilidade podemos aproximar a probabilidade do stand vender mais de 4 automóveis na próxima semana por $\frac{3+2}{50}=0.1$.

Definição Subjectiva de Probabilidade

Quando ao olhar para o céu diz a alguém que vai chover até ao fim do dia, está a usar a sua intuição para estabelecer uma probabilidade para a ocorrência de um acontecimento aleatório, isto é, está a usar a definição subjectiva de probabilidade.

Uma probabilidade subjectiva surge quando uma pessoa atribui um grau de credibilidade a um certo acontecimento aleatório, baseada na sua intuição ou no seu conhecimento empírico.

Vejamos dois exemplos de aplicação desta definição:

- O Sr. João é um Benfiquista e acha que a probabilidade de o Benfica ganhar o campeonato nesta época é superior a 0.8.

- A Maria sabe que 15% dos alunos de Estatística têm uma nota superior a 14, no entanto ela acredita que vai tirar uma nota superior a 14 com probabilidade de 0.75.

Propriedades das Probabilidades

Sejam A, B e C acontecimentos quaisquer associados a uma experiência aleatória cujo espaço de resultados é Ω.

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$$

$$\boxed{P(\Omega)=1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset)=0}$$

Exemplo:

O diretor da TESTMARKET, uma empresa que efetua estudos de mercado, acabou de receber os resultados de um inquérito feito a 100 pessoas, no qual se pedia a opinião acerca de um projeto governamental.

Opinião / **Sexo**	Contra	A favor	Sem opinião	Total
Feminino	10	20	15	45
Masculino	15	15	25	55
Total	25	35	40	100

Suponha que o diretor escolhe ao acaso uma das 100 pessoas entrevistadas para confirmar os dados do inquérito.

F ≡ "a pessoa selecionada é do sexo feminino",

M= $\overline{F}$ ≡ "a pessoa selecionada é do sexo masculino".

C ≡ "a pessoa selecionada é contra o projeto governamental";

P ≡ "a pessoa selecionada é a favor do projeto governamental";

S ≡ "a pessoa selecionada não tem opinião".

Da tabela anterior tiram-se as seguintes probabilidades:

$$P(F)=\frac{45}{100}=0.45 \qquad P(M)=P(\overline{F})=\frac{55}{100}=0.55$$

$$P(C)=\frac{25}{100}=0.25 \qquad P(P)=\frac{35}{100}=0.35 \qquad P(S)=\frac{40}{100}=0.4.$$

Obviamente, a probabilidade da pessoa selecionada ser do sexo feminino é igual a um menos a probabilidade de ela não ser do sexo feminino, isto é,

$\mathbf{P(F)=1-P(\overline{F})}$=0.45, equivalentemente, $\mathbf{P(\overline{F})=1-P(F)}=0.55$.

$\overline{A}$ inclui todos os resultados elementares que não estão contidos em A.

$$\boxed{\mathbf{P(A)+P(\overline{A})=1 \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{A})=1-P(A)}}$$

A probabilidade da pessoa selecionada ser do sexo masculino e a favor do projeto governamental, P(M∩P), é, pela tabela,

$$P(M\cap P)=\frac{15}{100}=0.15.$$

Qual será a probabilidade do acontecimento M∪P, de a pessoa selecionada ser do sexo masculino ou ser a favor do projeto?

$$P(M\cup F)=\frac{55+35-15}{100},$$

pois, os 15 inquiridos que são do sexo masculino e que são a favor do projeto, estão incluídos nos 55 que são do sexo masculino e nos 35 que são a favor do projeto. Estando contados duas vezes há que subtraí-los uma vez. Assim,

$$P(M\cup F)=\frac{55+35-15}{100}=\frac{55}{100}+\frac{35}{100}-\frac{15}{100}=P(M)+P(F)-P(M\cap F).$$

A propriedade seguinte é usualmente designada por **regra da adição**.

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$

Se A e B são acontecimentos incompatíveis ou mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset$, então,

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}}$$

pois $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0$.

Mais, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, então,

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).}$$

No exemplo, o acontecimento,

$C \cup P \equiv$ "a pessoa selecionada é contra o projeto ou a favor do projeto",

tem probabilidade,

$$P(C \cup P) = \frac{25}{100} + \frac{35}{100} = P(C) + P(P) = 0.55.$$

Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Viseu
PROBABILIDADES

Se em vez de dois, tivermos três acontecimentos, A, B e C, a probabilidade da sua união é dada por:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(C \cap B)} \\ \mathbf{+ P(A \cap B \cap C)}\end{gathered}}$$

Outra propriedade muito útil é a seguinte:

$$\boxed{\mathbf{A \subset B \implies P(A) \leq P(B)\,.}}$$

Voltando ao exemplo:

$V \equiv$ "a pessoa selecionada é do sexo masculino e a favor do projeto"

Não há dúvida que $V \subset M$, e, pela tabela

$$P(V) = P(M \cap P) = \frac{15}{100} = 0.15 \quad \leq \quad P(M) = \frac{55}{100} = 0.55\,.$$

U≡"a pessoa selecionada é dos sexo masculino mas não é a favor do projeto",

cuja probabilidade é, pela tabela ,

$$P(U)=\frac{55-15}{100},$$

pois, aos 55 inquiridos do sexo masculino há que retirar os que são a favor do projeto.

Note que o acontecimento U é o acontecimento M–P, e que a sua probabilidade é igual à probabilidade de ocorrência de M menos a probabilidade de ocorrência de M∩P, isto é,

$$P(U)=P(M-P)=\frac{55}{100}-\frac{15}{100}=P(M)-P(M\cap P).$$

Outra propriedade:

$$\boxed{\mathbf{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}}$$

1. Probabilidades Condicionadas. Independência

Sejam A e B são acontecimentos associados a uma experiência aleatória com espaço de resultados Ω.

Se P(B)>0, a **probabilidade condicional** ou **condicionada de A dado B**, denota-se por **P(A|B)** e é definida por,

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Esta, é a probabilidade de se realizar o acontecimento A sabendo que se realizou o acontecimento B.

Analogamente, se P(A)>0, a probabilidade de se realizar o acontecimento B dado que A se realizou é,

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Exemplo:

Suponhamos então, que dispomos da informação de que ao lançar o dado saiu uma face com um número par de pontos, isto é, realizou-se o acontecimento

A≡"saída de face com um nº par de pontos" ={2,4,6}

Qual será a probabilidade de ocorrência do acontecimento B?

B ≡ "saída de face com mais de 5 pontos" ={6}

Uma vez que sabemos que saiu uma face com um número par de pontos, os resultados possíveis já não são 6 mas apenas três, são eles, o 2, o 4 e o 6. Destes três resultados apenas um é favorável a B, isto é, B só se realiza se tiver saído o número 6. Então a probabilidade pedida é 1/3.

Obviamente, usando a definição iremos obter o mesmo resultado,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{2,4,6\} \cap \{6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{P(\{6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}.$$

Calculemos agora a probabilidade de não ocorrência de B sabendo que ocorreu A, $P(\overline{B} \mid A)$.

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(\{2,4,6\} \cap \{1,2,3,4,5\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{P(\{2,4\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

Note que, se P(A)>0

$$\boxed{\mathbf{P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)}.}$$

Exemplo:

Suponha que dispõe da informação de que o diretor da empresa do exemplo anterior seleciona uma pessoa que é contra o projeto governamental. Qual é a probabilidade da pessoa ser do sexo masculino?

Entre as 25 pessoas que são contra o projeto governamental, há 15 do sexo masculino. Então a probabilidade pedida é $\frac{15}{25} = 0.6$.

Usando a definição de probabilidade condicionada viria.

$$P(M \mid C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0.15}{0.25} = 0.6.$$

Regra da multiplicação (muito útil para determinar a probabilidade de ocorrência da intersecção de dois acontecimentos),

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)} \text{ se } \mathbf{P(B)>0},$$

ou,

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B \mid A)\, P(A)} \text{ se } \mathbf{P(A)>0}.$$

Esta regra pode-se generalizar a **n** acontecimentos da seguinte maneira:

Regra da multiplicação:

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são acontecimentos tais que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, então,

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = . \\ &\quad = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned}}$$

Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Viseu
PROBABILIDADES

Por definição dois acontecimentos A e B são ***independentes*** se,

$$\mathbf{P(A \cap B) = PA) \times P(B).}$$

Então, sendo A e B independentes, tem-se

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \text{ (com P(B)>0),}$$

isto é, a probabilidade de ocorrência de A dado que ocorreu B, é igual à probabilidade de ocorrência de A.

Analogamente,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \text{ (com P(A)>0).}$$

Das duas últimas equações concluímos que de facto a ocorrência de um acontecimento não influência a ocorrência do outro.

<u>Exemplo</u>:

$$P(M)=0.55\neq P(M|C)=0.6,$$

logo os acontecimentos M e C não são independentes.

Note também que,

$$0.15=P(M\cap C)\neq P(M)\times P(C)=0.55\times 0.25=0.1375$$

Dados três acontecimentos, estes podem ser independentes dois a dois, mas não serem independentes no seu conjunto.

Os acontecimentos A_1, A_2, ...,A_n são ***independentes***, se são independentes 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, etc., isto é, se

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)\text{, para todo } i\neq j$$

$$P(A_i\cap A_j\cap A_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)\text{, com } i, j \text{ e } k \text{ tais que } i\neq j,\ i\neq k\ k\neq j,$$

$$\vdots$$

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)......P(A_n).$$

Teorema das Probabilidades Totais. Teorema de Bayes

Teorema das Probabilidades Totais:

Se os acontecimentos A_1, A_2, ...,A_n são disjuntos dois a dois, tais que $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ e $P(A_i)>0$ para $i=1,...,n$, então, para qualquer acontecimento B, tem-se:

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n).$$

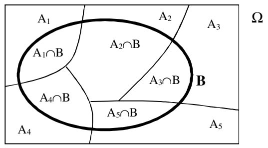


Figura 2.2: Partição do acontecimento B nos acontecimentos mutuamente exclusivos $A_1\cap B$, $A_2\cap B$, $A_3\cap B$, $A_4\cap B$, $A_5\cap B$.

Os acontecimentos $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, $A_3 \cap B$, $A_4 \cap B$ e $A_5 \cap B$ formam uma partição de B, isto é, são disjuntos dois a dois (ou mutuamente exclusivos) e

$$B = \bigcup_{i=1}^{5} (A_i \cap B).$$

Então, pela regra da adição,

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{5} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_5 \cap B)$$

e, pela regra da multiplicação,

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_5)P(A_5).$$

Teorema de Bayes:

Se os acontecimentos A_1, A_2...,A_n são disjuntos dois a dois, tais que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $P(A_i)>0$ para i=1,...,n , então para qualquer acontecimento B tal que P(B)>0, tem-se:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)} \quad i=1,...n.$$

Note que, por definição de probabilidade condicionada,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Pela regra da multiplicação

$$P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i)P(A_i),$$

e usando o teorema das probabilidades totais, tem-se

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n).$$

Então,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}.$$